Table des matières

Introduction 8

1 Notions et définitions **10**

1.1 **Les équations différentielles** 10

1.2 **Les systèmes différentiels linéaires** 12

1.3 **Les équations aux dérivées partielles** 14

1.4 **Rappels d'analyse fonctionnelle** 18

1.4.1 **Les espaces** 18

1.4.2 **Quelques formules** 21

1.4.3 **Quelques inégalités utiles** 21

2 Les équations de Boussinesq et La méthode de Galerkin **24**

2.1 **Les équations de Boussinesq** 24

2.1.1 **Historique** 25

2.1.2 **Définition des équations de Boussinesq** 26

2.1.3 **La direction de propagation de vague** 27

2.1.4 **Les différentes formes des équations de Boussinesq** 31

2.1.5 **La base des schémas numériques pour les équations de Boussinesq** 31

2.2 **La méthode de Galerkin** 32

2.2.1 **L'espace d'approximation de Galerkin d'ordre m** 33

2.2.2 **Le schéma de la méthode de Galerkin** 33

3 Solution d'une équation de Boussinesq de n-dimensions avec une condition non classique **35**

3.1 **Position du problème** 35

3.2 **L'étude de l'existence de la solution faible du problème posé par l'application de la méthode de Galerkin** 37

3.3 **L'unicité de la solution** 49

Conclusion générale 58

Bibliographie 59

Résumé

.....

Résumé

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour un problème non locale. Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires sur les équations différentielles, les systèmes différentiels, les équations aux dérivées partielles, la théorie des espaces fonctionnels, ainsi que les inégalités utilisées dans cette mémoire, et quelques théorèmes.

Dans le deuxième chapitre : on a donné un historique et une définition sur les équations de *Boussinesq*, ainsi qu'une définition sur la méthode utilisée (méthode de *Galerkin*).

Dans le troisième chapitre, on a traité un problème aux limites avec condition non locale pour une équation de *Boussinesq* à $n-$dimensions dans un cylindre. En utilisant la méthode de *Galerkin* pour démontrer l'existence de la solution faible du problème posé. Enfin, on a prouvé que cette solution est unique.

Abstract

The main objective of this work is the study of the existence and uniqueness of the generalized solution for a non-local problem. This work consists of three chapters :

The first chapter is devoted to preliminary notions on differential equations, differential systems, partial differential equations, the theory of functional spaces and inequalities used in this memory, and some theorems.

In the second chapter, we gave a history and a definition of the *Boussinesq* equations, and a definition of the method used (the *Galerkin* method).

In the third chapter, we treated a problem with non-local boundary condition for the *Boussinesq* equation in n-dimensions in a cylinder. Using the *Galerkin* method to demonstrate the existence of the weak solution of the problem. Finally, we prove the uniqueness of this solution.

Notations

Nous utilisons les notations suivantes tout au long du travail

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: la frontière de Ω.

$\mid \Omega \mid$: mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

$\mid \partial\Omega \mid$: mesure de Lebesgue de frontière de Ω.

x : un point de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

et $dx = dx_1 dx_2 .....dx_n$.

η : la normal unitaire extérieure à Ω.

$\triangle$: opérateure différentielle est appelé Laplacien.

$\triangle\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j}$.

Liste des figures

Figure 2.1 : Le cadre de référence.....27
Figure 2.2 : Exemple de propagation d'une vague.....27
Figure 2.3 : Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut (Étape 01).....28
Figure 2.4 : Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut (Étape 02).....28
Figure 2.5 : Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut (Étape 03).....29
Figure 2.6 : Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite (Étape01).....29
Figure 2.7 : Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite (Étape02).....30
Figure 2.8 : Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite (Étape03).....30
Figure 2.9 : Solution pour une équation de $Boussinesq,\ t = 2S$ 32

Introduction

En appliquant la modélisation mathématique pour divers phénomènes de la physique, de la biologie et de l'écologie, etc. Il survient souvent des problèmes avec des conditions aux limites non-classiques, qui relient les valeurs de la fonction inconnue sur le bord et à l'intérieur du domaine donné. Quelques fois les phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes avec des conditions aux limites non classiques qui impliquent une condition aux limites comme une condition intégrale sur le domaine spatial d'une fonction de la solution souhaitée. La condition aux limites non classique survient principalement lorsque les données sur la limite ne peuvent pas être mesurées directement, mais leurs valeurs moyennes sont connues. Dans les toutes dernières années, les problèmes non locaux, en particulier ceux avec des conditions intégrales ont reçu une grande attention. La signification physique des conditions non classique telles que la moyenne, la masse totale, le temps, etc. A servi comme une cause fondamentale de l'intérêt augmentant considérablement à ce genre de problèmes de valeur limite. Les problèmes non locaux sont généralement rencontrés en génie chimique, la transmission de chaleur, la physique des plasmas, thermo-élasticité, et débit de l'eau souterraine, etc.

Dans de nombreux domaines (mathématiques, physiques, biologie, etc.) , on est mené à chercher des fonctions dont les dérivés vérifiant certaines relations. Ces problèmes divers apparaissent dans la théorie des Équations Différentielles et des Équations aux Dérivées Partielles (E.D.P).

Quand sont apparues les E.D.P ?

Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17$ème$ siècle ($Newton$, $Leibniz$, etc.). Ensuite le domaine des E.D.P s'est enrichi au fur et a mesure du développement des sciences et en particulier de la physique, on se doit de citer quelque noms comme celui d'$Euler$, puis ceux de $Navier$ et $Stokes$ pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de $Fourier$ pour l'équation de la chaleur, de $Maxwell$ pour celles de l'électromagnétisme, de $Schrodinger$ et $Heisenberg$ pour les équations de la mécanique quantique, et bien sur de $Einstein$ pour les E.D.P de la théorie de la relativité.

L'objectif de ce mémoire est de donner l'application de la méthode de $Galerkin$ dans l'étude de l'existence du solution généralisée d'un problème mixte avec condition aux limites non clas-

sique pour une équation de $Boussinesq$ de $n-$dimensions.

La méthode de $Galerkin$ est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante :

Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie. On procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie.

On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que le résoudre directement en dimension infinie.

Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre a la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter qu'outre son intérêt théorique, la méthode de $Galerkin$ fournit généralement un procédé constructif d'approximation.

Ce travail contient trois chapitres :

Le premier chapitre expose quelques définitions des équations différentielles, des systèmes différentiels, des équations aux dérivées partielles, et quelques rappels d'analyse fonctionnelle ainsi que quelques inégalités utiles.

Dans le deuxième chapitre nous définissons les équations de $Boussinesq$ et la méthode de $Galerkin$.

Et enfin, dans le troisième chapitre nous traitons l'existence et l'unicité de la solution généralisée du problème mixte non local pour une équation de $Boussinesq$ de $n-$dimensions. Mesloub S. Mesloub F [31].

Chapitre 1

Notions et définitions

Introduction

Ce chapitre est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaire à la suite de ce travail. Nous rappelons quelques définitions et résultats de base sur les équations différentielles, les systèmes différentiels, et les équations aux dérivées partielles, ainsi qu'un petit rappel sur l'analyse fonctionnelle.

1.1 Les équations différentielles

***Équations différentielles ordinaires**

Définition 1.1 *une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \longmapsto u(t)$, et ses dérivées $(u', u'', u''', ..., u^{(n)})$ au point t définie par*

$$F(t, u'(t), u''(t), u'''(t), ..., u^{(n)}(t)) = 0 \tag{1.1.1}$$

On notera par abus

$$F(t, u', u'', u''', ..., u^{(n)}) = 0. \tag{1.1.2}$$

***Équations différentielles normales**

Définition 1.2 *On appelle Équation Différentielle Normale d'ordre (n) toute équation de la*

forme

$$u^{(n)} = F(t, u', u'', u''', ..., u^{(n-1)}). \tag{1.1.3}$$

***Équations différentielles linéaires**

Définition 1.3 *on appelle équation différentielle d'ordre* (n) *est linéaire si et seulement si elle est de la forme*

$$L(u) = f(x), \tag{1.1.4}$$

$$L(u) = a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + ... + a_1(x)u' + a_0(x)u. \tag{1.1.5}$$

***Équations différentielles non linéaires**

Définition 1.4 *une équation différentielle d'ordre* (n) *est non linéaire contient des termes non linéaire en* $u(t)$ *et/ou en ses dérivées.*

***Solution d'une équation différentielle**

Définition 1.5 *On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre* n *sur un certain intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, toute fonction* u *définie sur cet intervalle* I*,* n *fois dérivable en tout point de* I *et qui vérifie cette équation différentielle sur* I*, on notera en générale cette solution* (u, I) *.*

-Prolongement d'une solution :

Définition 1.6 *soient* (u, I) *et* $(\tilde{u}, \tilde{I})$ *deux solutions d'une même équation différentielle, On dit que* $(\tilde{u}, \tilde{I})$ *est un prolongement de* (u, I)*si et seulement si* $I \subset \tilde{I}$ *et* $\tilde{u} \setminus I = u$ *.*

-Solution maximale :

Définition 1.7 *Soient* I_1 *et* I_2 *deux intervalles sur* $\mathbb{R}$ *tels que* $I_1 \subset I_2$ *, on dit qu'une solution* (u, I_1) *est maximale dans* I_2 *si et seulement si* u *n'admet pas de prolongement* $(\tilde{u}, \tilde{I})$ *solution de l'équation différentielle telle que* $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$.

-Solution globale :

Définition 1.8 *On dit qu'une solution (u, I_1) est globale dans I_2 si et seulement si u admet un prolongement $\tilde{u}$ solution définie sur l'intervalle I_2 tout entier.*

Remarque 1.1 *Toute solution globale sur un Intervalle I est maximale sur I mais la réciproque est fausse.*

1.2 Les systèmes différentiels linéaires

***Théorie préliminaire**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ et $f_i : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

L'objectif est de trouver des fonctions $x_1, ..., x_n : I \to \mathbb{R}$, n fonctions de classe C^1 sur I telles que

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = a_{11}(t)\, x_1(t) + ... + a_{1n}(t)\, x_n(t) + f_1(t), \\ \qquad\qquad ..... \\ \qquad\qquad ..... \\ \dot{x_n}(t) = a_{n1}(t)\, x_1(t) + ... + a_{nn}(t)\, x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + F(t), \tag{1.2.2}$$

Où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ ... \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots\ldots\ldots a_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(t) \ldots\ldots\ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

En général il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation. Soit $X^0 \in \mathbb{R}^n$ donnée

$$X^0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}. \tag{1.2.3}$$

Le but est de trouver X solution de l'équation (1.2.2) satisfaisant la condition initiale (1.2.3). C'est à dire trouver X solution tel que

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t) X(t) + F(t), \\ X(t_0) = X^0, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

***Systèmes différentiel linéaires homogènes**

Le système (1.2.1) est dit homogène si $F \equiv 0$, c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = a_{11}(t) x_1(t) + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}(t) x_n(t) \ , \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x_n}(t) = a_{n1}(t) x_1(t) + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}(t) x_n(t) \ , \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Théorème 1.1 *L'ensemble H des solutions d'un système homogène est un espace vectoriel de dimension n.*

Remarque 1.2 *Il suffit alors d'avoir n solutions linéairement indépendantes de* (1.2.5) *qui formeront une base de H.*

Définition 1.9 (*Matrice fondamentale*)

Soient $X_1, ..., X_n$ *des solutions de* (1.2.5)*. Si les n fonctions sont linéairement indépendantes, on dit qu'ils forment un ensemble fondamental de solution de* (1.2.5)*.*

On notera alors :

$$M(t) = (X_1(t) \mid ..... \mid X_n(t)). \tag{1.2.6}$$

Théorème 1.2 *(Solution du système homogène)*

Soient $X_1, ..., X_n$ *un ensemble fondamental de solutions de* (1.2.5)*, alors toute solution* X *de* (1.2.5) *est de la forme*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i.X_i\ (t), \tag{1.2.7}$$

avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

***Systèmes différentiel linéaires non homogènes**

Revenons au système non homogène (1.2.2) avec F non identiquement nulle.

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + F(t),$$

Théorème 1.3 *(Solution du système non homogène)*

Soient $X_1, ..., X_n$ *un ensemble fondamental de solutions du problème homogène* (1.2.5)*, et* X_p *une solution particulière de* (1.2.5)*, alors toute solution* X *de* (1.2.2) *est de la forme*

$$X(t) = X_p(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i.X_i\ (t), \tag{1.2.8}$$

avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

1.3 Les équations aux dérivées partielles

Définition 1.10 *Une Équation aux Dérivées Partielles (E.D.P en abrégé) est une équation faisant intervenir une équation inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.*

***Ordre d'une équation aux dérivées partielles**

Définition 1.11 *On appelle ordre d'une E.D.P l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.*

Les E.D.P les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint des phénomènes.

-**Le transport :** convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère, convection d'un polluant dans la mer etc.

-**La diffusion** : la diffusion de la chaleur dans un solide ou un fluide, la diffusion des particules fines, etc.

-**L'équilibre** : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces, etc.

-**Les vibrations** : les vibrations du son dans l'aire, les vibrations des structures, les vibrations radio, etc.

Nous verrons qu'à chacun de ces phénomènes correspond une catégorie d'EDP.

L'étude est restreintes aux EDP linéaire d'ordre inférieur ou égal à deux.

***Exemples d'équation aux dérivées partielles**

Nous citons quelques équations aux dérivées partielles "célèbre", et quelques systèmes des équations aux dérivées partielles :

$\Delta U = 0$	L'équation de Laplace.
$\Delta U - f = 0$	L'équation de Poisson.
$U_t - \Delta U = 0$	L'équation de la chaleur, diffusion homogène.
$U_{tt} - \Delta U = 0$	L'équation des ondes.
$U_{tt} - \Delta U + U_t + U = 0$	L'équation de la télégraphistes.
$i\ \Psi_t + \Delta\Psi = v\ \Psi$	L'équation de Schrodingr.
$U_t = K\ \Delta U + r\ U\ (1 - \frac{U}{C})$	L'équation de Fisher.
$\begin{cases} E_t = rot(H) \\ H_{\ t} = -\ rot(E) \\ \mathrm{div}(E) = \mathrm{div}(H) = 0 \end{cases}$	Les équations de Maxwell.
$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + f(U) - V \\ V_t = \sigma\ V_{tt} + \alpha U - \beta V \end{cases}$	Les équations de Fitzhugh-Nagumo, pour α, β, σ dans $\mathbb{R}_+$.

***Les EDP linéaire du premier ordre**

Définition 1.12 *On appelle EDP linéaire du premier ordre dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et d'inconnue* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$*, une EDP de la forme :*

$$F(x).\nabla\Phi(x) + g(x).\Phi(x) = h(x), \tag{1.3.1}$$

Telle que $\nabla\Phi(x)$ *est le vecteur gradient de* Φ

$$(\nabla\Phi(x))_i = \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}, \tag{1.3.2}$$

Et

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)), \tag{1.3.3}$$

Donc

$$f_1(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1} + f_2(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_2} + ... + f_n(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_n} + g(x).\Phi(x) = h(x). \tag{1.3.4}$$

Exemple 1.1 *L'équation de continuité de la mécanique des fluides :*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,x) + \operatorname{div}(\rho(t,x).u(t,x)) = 0.$$

***Les EDP linéaire du second ordre**

Définition 1.13 *Quant on pose* $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i;j}(X)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^{n} B_i(X)\frac{\partial U}{\partial x_i}(X) + C.U = G(X), \tag{1.3.5}$$

avec $A_{i;j}, B_i, C, G$ *des fonctions indépendantes de* U *ne s'annulant pas toutes simultanément dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Si nous limitons dans $\mathbb{R}^2$, *c'est à dire* $X = (x, y)$, *alors*

$$A.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D.\frac{\partial U}{\partial x} + E.\frac{\partial U}{\partial y} + F.U = 0, \tag{1.3.6}$$

On peut classer les EDP l'inéaire d'ordre deux en trois grandes familles :

Elliptique, Hyperbolique, et Parabolique.

- Les équations Elliptiques :

L'équation est Elliptique si $B^2 - 4AC \prec 0$.

Exemple 1.2 $\Delta U = f$ *L'équation de Poisson.*

- Les équations Hyperboliques :

L'équation est Hyperbolique si $B^2 - 4AC \succ 0$.

Exemple 1.3 $U_{tt} - \Delta U = 0$ *L'équation des ondes.*

- Les équations Paraboliques :

L'équation est Parabolique si $B^2 - 4AC = 0$.

Exemple 1.4 $U_t - \Delta U = 0$ *L'équation de la chaleur.*

Définition 1.14 ***(Solution généralisée)***

Une solution généralisée comme son nom l'indique, est donnée à une EDP qui n'a pas de solution au sens classique.

Le plus souvent, on prolonge l'EDP à un ensemble de distributions, simplement en considérant les dérivées au sens des distributions, au lieu des dérivées classiques. L'EDP peut alors avoir une solution généralisée (distribution) qui n'est pas assez dérivable au sens classique pour être solution ordinaire.

Remarque 1.3 *Si une EDP n'a pas de solution généralisée, on est sûr qu'elle n'a pas de solution usuelle.*

1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.4.1 Les espaces

***La Norme**

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$.

On appelle norme sur E dans $\mathbb{R}_+$, notée $\| \, . \, \|$ telle que :

i) $\| \, x \, \| \geq 0, \forall x \in E \;\; et \;\; \| \, x \, \| = 0 \;\; ssi \;\; x = 0;$

ii) $\| \, \lambda . x \, \| = \; | \, \lambda \, | \, \| \, x \, \| \; , \;\; \forall \lambda \in \mathbb{k} \; , \forall x \in E \;\; ;$

iii) $\| \, x + y \, \| \leqslant \| \, x \, \| + \| \, y \, \| \; , \;\; \forall x, y \in E \; .$

***Le Produit scalaire**

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une fonction scalaire $(.,.)$ de $E \times E$ telle que :

i) $\forall x \in E$, l'application $x \mapsto (x, y)$ est linéaire ;

ii) $\overline{(x, y)} = (x, y), \;\; \forall x, y \in E \; ;$

iii)$(x, x) \geqslant 0, \;\; \forall x \in E$ et $(x, x) = 0 \;\; ssi \;\; x = 0.$

***Suite de Cauchy**

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E est dite de *Cauchy* si, pour tout $\varepsilon \rangle \, 0$, il existe un entier $N \rangle \, 0$ tel que :

$d \, (x_n, x_m) \langle \, \varepsilon$ pour $n, m \geq N \; .$

***Espace normé**

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

***Espace complet**

Un espace métrique est dit complet si toute suite de *Cauchy* admet une (unique) limite dans l'espace.

***Espace de Banach**

Un espace de *Banach* est un espace vectoriel normé complet.

***Espace de Hilbert**

Un espace de *Hilbert* est un espace de *Banach* muni d'une produit scalaire $(.,.)$ sur $E \times E$

tel que la norme de l'espace de *Banach* satisfaite :

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)}. \tag{1.4.1}$$

***Espace de Lebesgue** $L^P(\Omega)$

Soit $1 \leq P < \infty$, on appelle espace de *Lebesgue* $L^P(\Omega)$ l'espace :

$$L^P(\Omega) = \left\{ U : \Omega \to \mathbb{R}, U \quad fonction\ mesurable\ et \quad \| U \|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_\Omega | U(x) |^P dx \right)^{\frac{1}{P}} < \infty \right\}, \tag{1.4.2}$$

Et

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ U : \Omega \to \mathbb{R}, U \quad fonction\ mesurable\ et \quad \| U \|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \mid U(x) | < \infty \right\}, \tag{1.4.3}$$

Où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} \mid U(x) | = \inf \{ C \in \mathbb{R}, \mid U(x) | \leq C \quad \text{pp.sur } \Omega \} \tag{1.4.4}$$

Notation : si $P = 2$

$$\| U \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega | U(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4.5}$$

$$(U,V)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega U(x).V(x)\, dx. \tag{1.4.6}$$

***Espace de Sobolev**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{N}$, $1 \leq P \leq \infty$, on appelle espace de *Sobolev* (sur Ω , d'ordre K , basé sur $L^P(\Omega)$), et on note $W^{K,P}(\Omega)$, l'ensemble des applications, $U \in L^P(\Omega)$ dont toutes les dérivées faibles d'ordre inférieur ou égal à K sont dans $L^P(\Omega)$.

$$W^{K,P}(\Omega) = \left\{ U \in L^P(\Omega), D^\alpha U \in L^P(\Omega), \forall \mid \alpha \mid \leq K \right\}, \tag{1.4.7}$$

Muni de la norme

$$\| U \|_{W^{K,P}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq K} | D^{\alpha} U |^{P}_{L^{P}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}}, \tag{1.4.8}$$

Dans cette définition la dérivée partielle D^{α} est entendu au sens des distributions.

Où

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n, \tag{1.4.9}$$

α est un multi-indice et

$$\begin{aligned} D^{\alpha} &= \Pi(\frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i} \\ &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \, \partial^{\alpha_2} x_2 \, ...\partial^{\alpha_n} x_n}, \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Avec

$$| \alpha | = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{1.4.11}$$

$$x \in \mathbb{R}^n , \qquad x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} . \, x_2^{\alpha_2} .....x_n^{\alpha_n}. \tag{1.4.12}$$

Théorème 1.1 *pour tout ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*, pour tout* $K \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leq P < \infty$*, on a*

$$H^{K,P}(\Omega) = W^{K,P}(\Omega) \tag{1.4.13}$$

***Espace $\mathbf{H^K}$**

Lorsque $P = 2$, $W^{K,P}(\Omega) = W^{K,2}(\Omega)$ est plutôt noté $H^{K}(\Omega)$.

$H^{K}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\| U \|_{H^{K}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq K} \| D^{\alpha} U \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.14}$$

On introduit sur H^{K} le produit scalaire

$$\langle U, V\rangle = \sum_{|\alpha|\leq K} \langle D^{\alpha}U, D^{\alpha}V\rangle \tag{1.4.15}$$

(ici, $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$).

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $K \in \mathbb{N}$, l'espace $H^K(\Omega)$ muni de produit scalaire $(1, 4, 15)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.4 *L'intérêt d'avoir un espace séparable est de pouvoir construire une base Hilbertienne dénombrable.*

1.4.2 Quelques formules

***Formule de la divergence**

La formule de la divergence sur un domaine Ω est définie par :

$$\int_{\Omega} \text{div } W \ dx = \int_{\partial\Omega} W.n \ d\sigma, \tag{1.4.16}$$

Tel que W est un champ des vecteurs définis sur Ω. $n(x)$ la normale extérieure de Ω.

***Formule de Green**

La formule de *Green* sur un domaine Ω est définie par :

$$\int_{\Omega} (\triangle U) .V \ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \eta}.V \ d\sigma - \int_{\Omega} \bigtriangledown U. \bigtriangledown V \ dx. \tag{1.4.17}$$

1.4.3 Quelques inégalités utiles

*** Inégalité de Grönwall :**

Soient $U, V : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telle que, pour quelque $C \geq 0$, on a :

$$U(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} U(s).V(s) \ ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{1.4.18}$$

Alors

$$U\ (t)\ \leq\ C.\ \exp\ \left(\int_{t_0}^{t} V(s)\ ds\right),\quad \forall t\in[t_0,t_1], \tag{1.4.19}$$

*** Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient $U,V\in L^2(\Omega)$ alors :

$$(\int_{\Omega} U\ (x).V\ (x)\ dx)^2\ \leq\ \left(\int_{\Omega} |\ U\ (x)\ |^2\ dx\ \right)\left(\int_{\Omega} |\ V\ (x)\ |^2\ \ dx\ \right). \tag{1.4.20}$$

*** Inégalité de Hölder**

Soit $U\in L^p(\Omega)$, et $V\in L^q(\Omega)$ alors :

$$|\int_{\Omega} U\ (x).V\ (x)\ dx\ |\leq\ \left(\int_{\Omega} |\ U\ (x)\ |^p\ dx\ \right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega} |\ V\ (x)\ |^q\ \ dx\ \right)^{\frac{1}{q}}\quad ,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1.4.21}$$

*** Inégalité triangulaire**

Soient $U,V\in L^2(\Omega)$ alors :

$$(\int_{\Omega} |\ U\ (x)+V\ (x)\ |^2\ \ dx)^{\frac{1}{2}}\ \leq\ \left(\int_{\Omega} |\ U\ (x)\ |^2\ dx\ \right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\Omega} |\ V\ (x)\ |^2\ \ dx\ \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.22}$$

*** Inégalité de $\varepsilon-$Cauchy**

$$|\ \alpha\beta\ |\leq\frac{\varepsilon}{2}\alpha^2+\frac{1}{2\varepsilon}\beta^2, \tag{1.4.23}$$

tel que $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

*** Inégalité de trace**

Soit $U\in W^{1,2}(\Omega)$, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ alors :

$$\int_{\partial\Omega} |\ U\ \ |^2\ \ dS\ \leq\ \int_{\Omega}(\varepsilon\ |\ \nabla U\ \ |^2+C(\varepsilon)\ |\ U\ \ |^2)dx\ , \tag{1.4.24}$$

$$\|U\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon.\|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon).\|U\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.4.25}$$

tel que $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ et $C(\varepsilon)$ est une constante positive.

*** Inégalité de Poincaré**

Théorème 1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné de frontière $\partial\Omega$, alors Il existe une constante $C_\Omega \rangle 0$ telle que :*

$$\|U\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega.\|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.4.26}$$

Chapitre 2

Les équations de Boussinesq et La méthode de Galerkin

Introduction

Dans ce chapitre nous définissons les équations de *Boussinesq* et la méthode de *Galerkin*, cette méthode est utilisée pour étudier l'existence de la solution d'un problème mixte.

2.1 Les équations de Boussinesq

Introduction

Il y a plusieurs raisons pour étudier la surface libre des vagues d'eau et leurs propagations dans la mer, tels que la nécessité de prévoir le mouvement de surface d'eau à un certain endroit et temps, et d'en déduire les effets lorsque les vagues atteignent les côtes, qui est d'un grand intérêt pour les défenses côtières.

La conception d'un port implique généralement l'essai d'un certain nombre des dispositions possibles pour une variété des conditions afin de produire une conception qui minimise les perturbations des vagues dans le port. De tels problèmes peuvent être analysés expérimentalement avec des modèles réduits dans des cuves expérimentales, ou numériquement par l'application d'un modèle mathématique approprié et un procédé numérique.

L'avantage des modèles numériques est la facilité, peuvent être construits et testés par rapport

à la reconstruction des modèles physiques.

Les modèles numériques sont généralement basés sur des modèles mathématiques en eau peu profonde, les équations incompressibles de $Navier-Stokes$ constitueraient un modèle mathématique précis, la solution numérique d'un problème réaliste impliquerait un grand domaine spatial en trois dimensions avec une surface libre comme frontière. En pratique, l'étude des eaux peu profondes de cette classe de problème peut être utilisée pour simplifier le modèle mathématique et ainsi réduire la charge de calcul de sa solution. Ce résultat est obtenu par la réduction du modèle mathématique à deux dimensions. Les plus simples de ces systèmes d'équations des vagues dispersives sont les équations de $Boussinesq$.

Les équations de $Boussinesq$ sont largement utilisées dans l'ingénierie côtière. Un exemple parmi d'autres est la modélisation des vagues de tsunami.

Ces équations peuvent également être utilisées pour modéliser les oscillations de marée. Bien sûr, ces types de mouvement de vague sont parfaitement décrits par les équations de $Navier-Stokes$, mais actuellement il est impossible de résoudre entièrement en trois dimensions des modèles dans un domaine important. Ainsi, les modèles approximatifs tels que les équations de $Boussinesq$ doivent être utilisées.

2.1.1 Historique

$Valentin\ Joseph\ Boussinesq$, né à Saint-André-de-Sangonis (Hérault) le 13 $mars$ 1842 et mort à Paris le 19 $février$ 1929, est un hydraulicien et mathématicien français. Il est élu à l'Académie des sciences, membre de la section de mécanique, en 1886.

Les années 1871 et 1872 ont été particulièrement important dans le développement des équations de $Boussinesq$. En 1871, $Boussinesq$ a reçu le prix de Poncelet l'Académie des sciences pour ses travaux, il a présenté des notes célèbres sur la vague solitaire intitulée «$Vague\ solitaire\ se\ propageant\ Dans\ un\ canal\ rectangulaire$ », qui est étendu plus tard dans une note intitulée «$Théorie\ générale\ des\ mouvements\ qui\ sont\ propagés\ dans\ un\ canal\ non\ rectangulaire\ horizontal$ ». $Saint-Venant$ présente quelques notes de $Boussinesq$ intitulé «$Sur\ le\ mouvement\ permanent\ varie\ l'eau\ dans\ les\ tuyaux\ de\ conduite\ et\ dans\ les\ canaux\ découverts$ ». $Saint-Venant$ lui-même publie quelques notes intitulé «$Théorie\ du\ mouvement\ non\ permanent\ des$

eaux ».

Toutes ces notes portent sur la théorie d'eau peu profonde. Le 13 $Novembre$ 1871, $Boussinesq$ soumet un document intitulé «*Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal* ».

Les équations des vagues dispersives non linéaires ont d'abord été développées pour expliquer les observations expérimentales des vagues solitaires qui pourraient voyager pour des distances relativement importantes sans changement de leur forme ou de la vitesse.

Ces dernières années, il y a eu plusieurs propositions de systèmes étendus de $Boussinesq$ pour lesquels la dispersion est valable jusqu'à la limite de l'eau profonde, ce qui augmente la plage utile de ces modèles pour de nombreuses applications. En choisissant la vitesse à une profondeur arbitraire comme l'une des variables.

Il y a eu beaucoup de développements ultérieurs des équations de $Boussinesq$ comme dans les travaux de $Peregrine$ [1967], $Nwogu$ [1993], $Weietal$ [1995], $Madsen$ et $Schaffer$ [1998].

2.1.2 Définition des équations de Boussinesq

Les équations de $Boussinesq$ décrivent un grand groupe de phénomènes des vagues dispersives non linéaires, tels que la propagation des vagues longues sur la surface d'eau peu profonde.

Le but de ce type de modélisation est de réduire les problèmes de trois dimensions à deux dimensions.

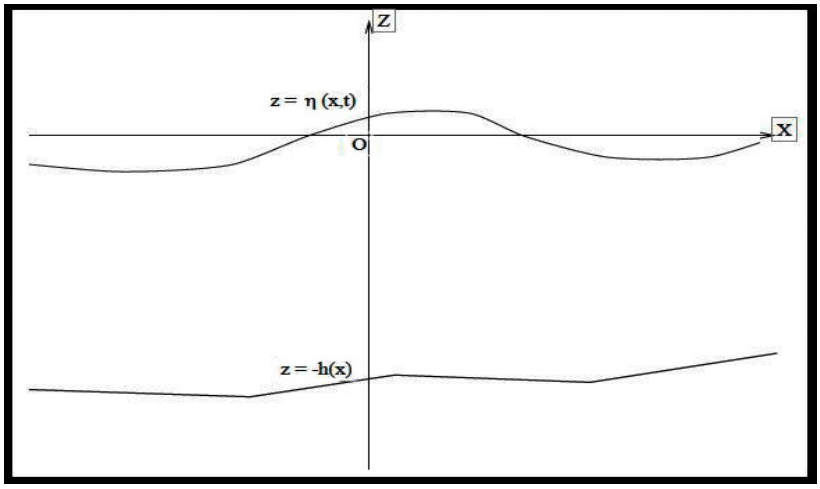
Les équations de $Boussinesq$ ont une forme différentielle facile par apport à celles d'$Euler$ ou de $Navier - Stokes$, qui peuvent poser des difficultés dans leur approximation numérique.

Les équations de $Boussinesq$ possèdent une structure $hyperbolique$ combiné avec des dérivés d'ordre élevé pour modéliser la dispersion des vagues.

Le point de départ pour la modélisation des vagues d'eau sont les équations de $Navier-Stokes$ incompressibles. Cependant, la modélisation mathématique de ces équations est un problème en trois dimensions avec une limite de surface libre, les équations de $Boussinesq$ décrivant les modèles des vagues d'eau peu profonde en deux dimensions.

Pour simplifier la présentation en deux dimensions, (x, z) étant horizontal et vertical, respectivement.

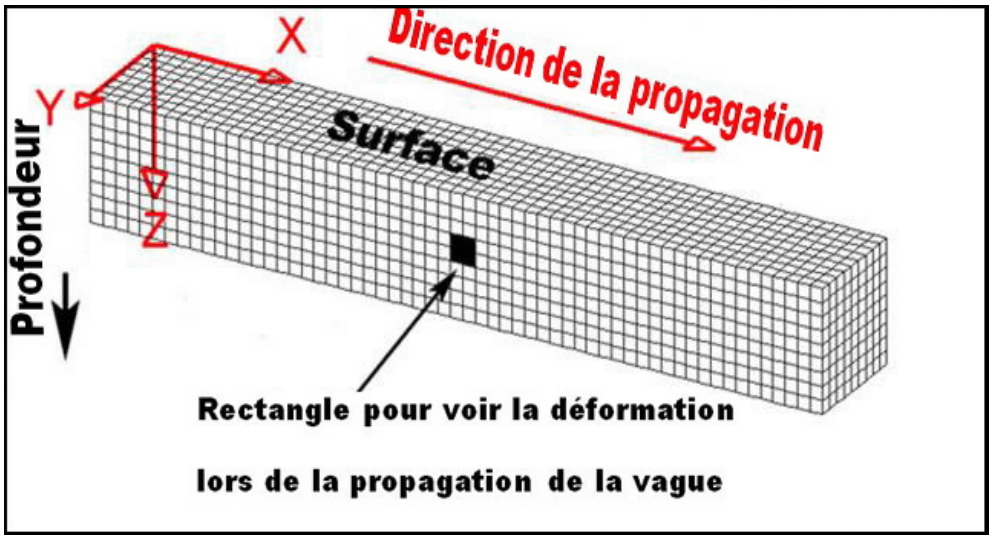
La coordonnée z varie entre la surface libre $\eta(x,t)$ et le fond de la mer $(-h(x))$.



: *Figure* 2.1 : *Le cadre de référence*

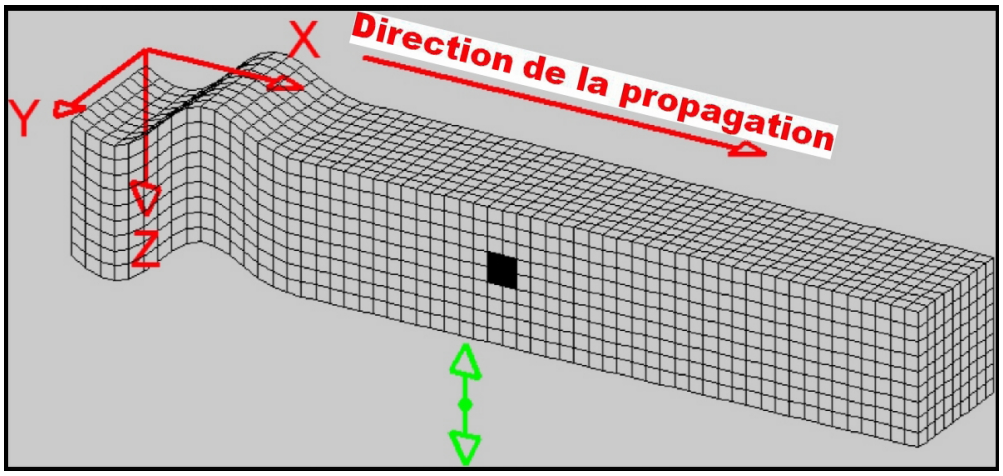
Remarque 2.1 *La dérivation de Boussinesq a été limitée à deux dimensions* (x *et* t).

2.1.3 La direction de propagation de vague

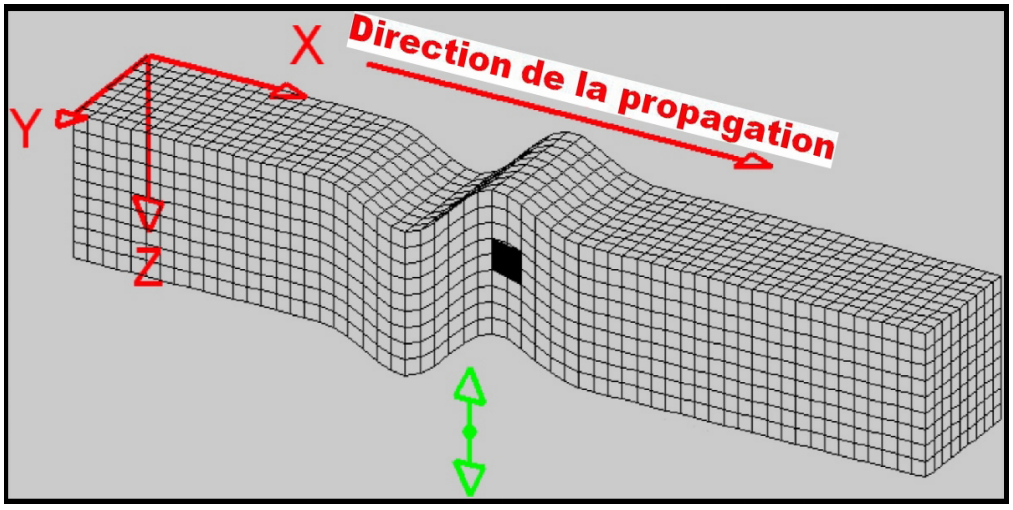


: *Figure* 2.2 : *Exemple de propagation d'une vague.*

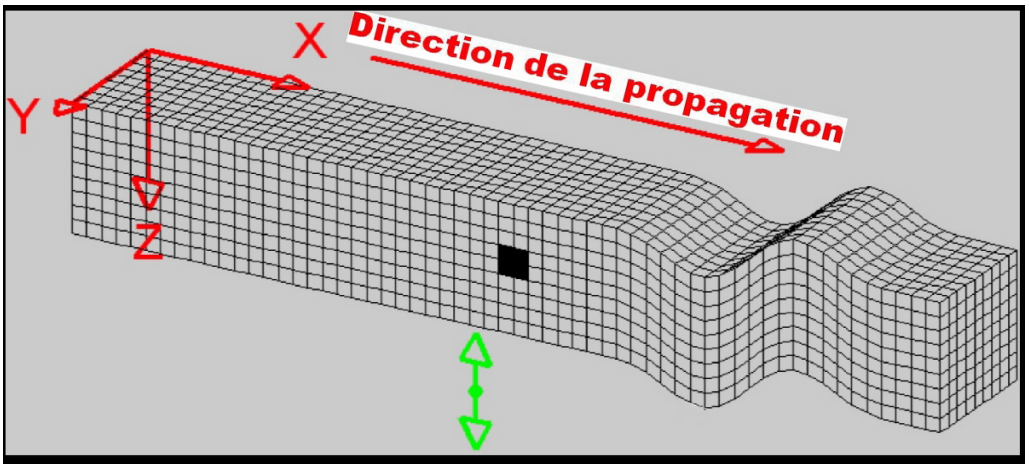
*** Les vagues se propagent verticalement de bas à haut comme il est montré dans les figures suivantes :**



: *Figure* 2.3 : *Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut* (*Étape* 01).

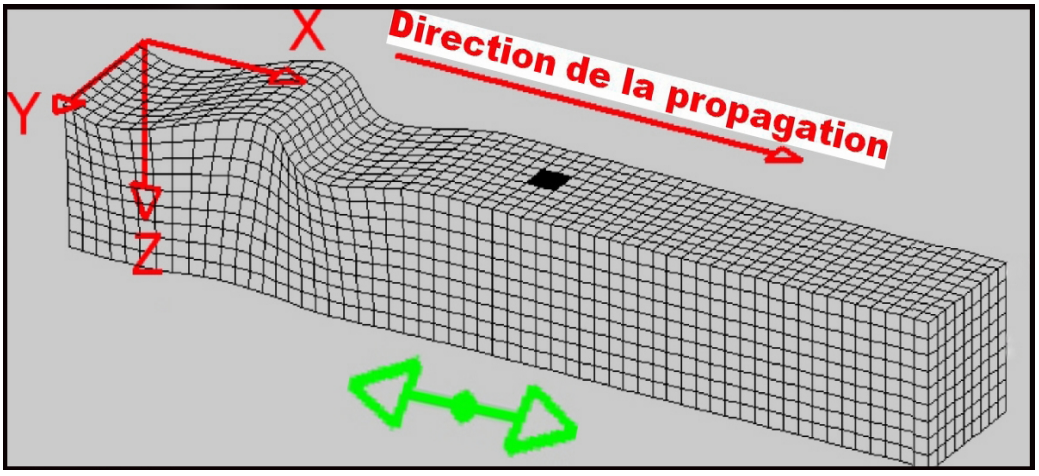


: *Figure* 2.4 : *Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut* (*Étape* 02).

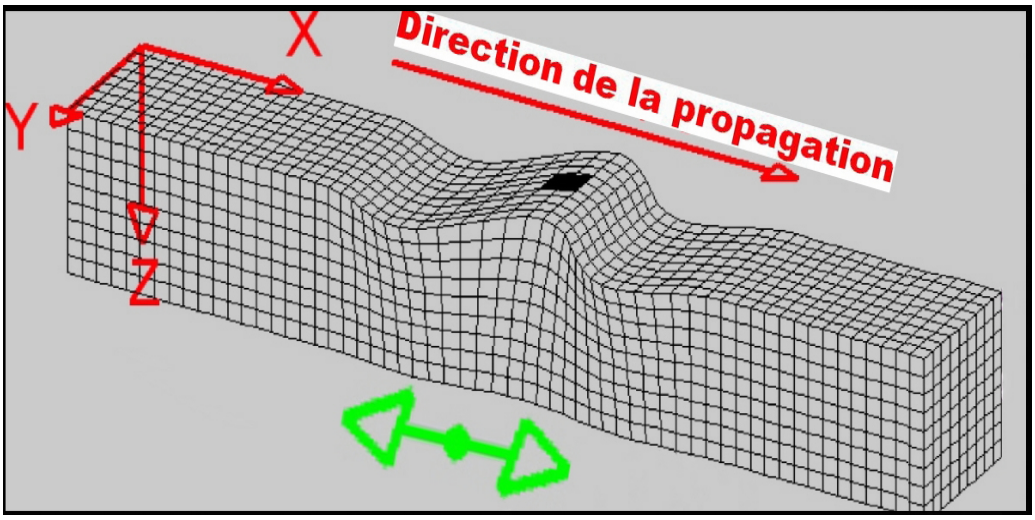


: *Figure* 2.5 : *Exemple d'une vague qui se propage verticalement de bas à haut* (*Étape* 03).

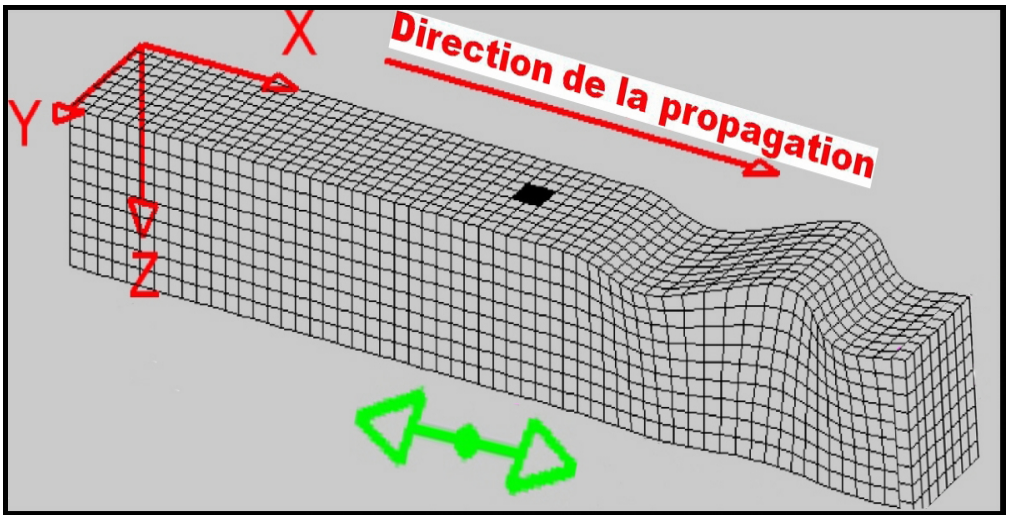
*** Les vagues se propagent horizontalement de gauche à droite comme il est montré dans les figures suivantes :**



: *Figure* 2.6 : *Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite* (*Étape* 01).



: *Figure* 2.7 : *Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite* (*Étape* 02).



: *Figure* 2.8 : *Exemple d'une vague qui se propage horizontalement de gauche à droite* (*Étape* 03).

2.1.4 Les différentes formes des équations de Boussinesq

Les différentes possibilités des équations de *Boussinesq* dans le choix de la grandeur de la vitesse. Dans la plupart des cas, on choisit la vitesse à un niveau d'eau arbitrair. La performance du modèle résultant est très sensible aux propriétés de la propagation. Le bon choix de la variable de vitesse, augmente considérablement l'amélioration de la propagation des vagues.

Il y a des différentes équations de *Boussinesq*, les plus importantes :

1)**Boussinesq's Boussinesq Equation** (**BBE**) : manque le quatrième dérivé mixte.

2)**Boussinesq Paradigm Equation** (**BPE**) : une application non linéaire sous la forme générale suivante :

$$u_{tt} = \triangle \left(u - \alpha u^2 + \beta_1 u_{tt} - \beta_2 \triangle u \right) \tag{2.1.1}$$

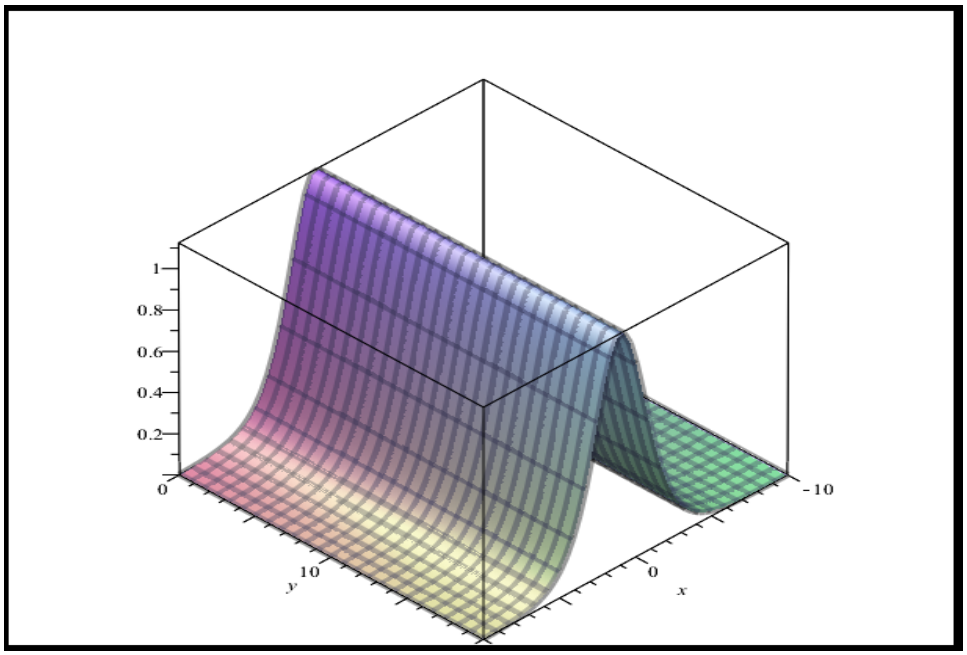
où u est l'élévation de la surface, β_1, β_2 sont deux coefficients de la propaguation, et α est un paramètre d'amplitude.

2.1.5 La base des schémas numériques pour les équations de Boussinesq

La plupart des schémas numériques pour les équations de *Boussinesq* sont basées sur la méthode des différences finis, ces méthodes sont des techniques courantes de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Plus récemment, *Wei* et *Kirby* présenté une autre technique alternative pour divers systèmes de type *Boussinesq* et de démontrer que les solutions précises peuvent être obtenues.

La méthode des différences finis a été utilisées pour prédire les élévations des vagues à l'intérieur des ports et des vagues d'interactions dans la zone côtier. Cette méthode est simples à formuler, mais il y a une difficultés dans la modélisation des géométries en deux dimensions de l'espace avec des grilles structurées peuvent conduire à une perte de précision. Prendre comme exemple



: *figure* 2.9 : *Solution pour une équation de Boussinesq,* $t = 2S$.

Les modèles de *Boussinesq* peuvent être évalués théoriquement par leurs caractéristiques de la propaguation, en gardant à l'esprit l'objectif final de résoudre les problèmes en trois dimensions dans des environnements de profondeur variable.

2.2 La méthode de Galerkin

Introduction

Dans ce mémoire, nous avons étudié une équation bidimensionnelles de *Boussinesq* pour l'eau de profondeur variable. Cette équation est toujours applicable sur des vagues se propageant à des profondeurs variables. Une méthode de *Galerkin* est utilisée pour résoudre cette équation de type hyperbolique.

2.2.1 L'espace d'approximation de Galerkin d'ordre m

Définition 2.1 *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*

$$\begin{cases} i)\ V_m \subset V \quad (\ dim\ V_m < +\infty) \\ ii)\ \ V_m \to V\ \ quand\ \ m \to +\infty \end{cases}$$

Et il existe K sous-espace dense dans V, tel que pour tout $v \in K$, on peut trouver une suite $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_m \in V_m$ et $v_m \to v$ dans V lorsque $m \to \infty$.
L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m.

2.2.2 Le schéma de la méthode de Galerkin

Soit P le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonctions construit sur un espace de *Hilbert* séparable V. Soit u la solution unique du problème P.
Après avoir fait un choix d'une approximation de *Galerkin* V_m de V, il convient de définir un problème approché P_m dans l'espace de dimension finie V_m ayant une unique solution u_m.
Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

Etape n^{0}1 :

On définit la solution u_m du problème P_m.

Etape n^{0}2 :

On établit des estimations sur u_m « estimation a priori » qui traduisent que u_m est uniformément bornée.

Etape n^{0}3 :

Par l'utilisation de résultat de u_m, qui est uniformément bornée, il est alors d'extraire de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suit $\{\grave{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape n^{0}2.
Soit alors u la limite obtenue.

Etape n^{0}4 :

On montre que u est solution du problème P. Donc la solution cherchée d'après l'unicité.

Etape n^{0}5 :

Résultats de convergences fortes.

Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u(x,t)$ comme combinaison linéaire de « fonctions de bases » $w_k(x)$ telle que $u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, w_k(x)$
où les $\alpha_k(t)$ sont alors solutions d'un système de n équations différentielles linéaires.

Chapitre 3

Solution d'une équation de Boussinesq de n-dimensions avec une condition non classique

Introduction

Nous divisons ce chapitre en trois sections : Dans la première section, nous indiquons le problème, définissons quelques espaces et donnons une définition pertinente de solution faible.

La deuxième section est consacrée à l'étude de l'existence de la solution faible du problème posé par l'application de la méthode de *Galerkin*.

Enfin, dans la troisième section, nous prouvons l'unicité de la solution faible du problème posé.

3.1 Position du problème

Dans ce mémoire, nous sommes préoccupés par un problème avec des conditions aux limites mixtes, pour l'équation de *Boussinesq* de $n-$ dimensions dans un cylindre $Q_T = \Omega \times (0, T)$, où

Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec la frontière $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - \alpha^2\Delta u - \beta^2\Delta u_{tt} = F(x,t), \\ u\ (x,0) = \varphi(x), \quad u_t\ (x,0) = \psi(x), \\ \partial u/\partial\eta = \displaystyle\int_0^t\int_\Omega u\ (\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $F(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions donnés, et $\partial u/\partial\eta$ désigne la dérivée normale.

Soient $\{u \in L^2(Q_T) : D^{\alpha}u \in L^2(Q_T)$ pour tous $|\alpha| \leq 1\}$ l'espace de *Sobolev*, et $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ l'espace de *Hilbert* dont les éléments u sont en $L^2(Q_T)$ avec u_t et u_x.

La norme dans $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ est définie par :

$$\|u\|_{W_2^{\Delta,1}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T}[u^2 + u_x^2 + u_t^2 + (\Delta u)^2]dxdt\right)^{1/2},$$

le produit scalaire $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ est définie par

$$(u,v)_{W_2^{\Delta,1}(Q_T)} = \int_{Q_T}(uv + u_xv_x + u_tv_t + \Delta u.\Delta v)dxdt.$$

Maintenant, soient $V(Q_T)$ et $W(Q_T)$ deux ensembles des espaces définis respectivement par :

$$V(Q_T) = \left\{u \in W_2^{\Delta,1}(Q_T) : \nabla u_t \in L^2(Q_T)\right\},$$

Et

$$W(Q_T) = \{u \in V(Q_T) : u(x,T) = 0\}.$$

Nous avons l'équation suivante :

$$u_{tt} - \alpha^2\Delta u - \beta^2\Delta u_{tt} = F(x,t). \tag{3.1.2}$$

Multiplions cette équation par $v \in W(Q_T)$, et intégrant sur $Q_T = \Omega \times (0,T)$:

$$\int_{Q_T} u_{tt}vdxdt - \alpha^2\int_{Q_T}\Delta uvdxdt - \beta^2\int_{Q_T}\Delta u_{tt}vdxdt = \int_{Q_T}F(x,t)vdxdt. \tag{3.1.3}$$

$(.,.)_{L^2(Q_T)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$, u la solution de (3.1.1), et $v \in W(Q_T)$.

Après l'utilisation de la formule de *Green*, et les conditions aux limites dans (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & \alpha^2 (\nabla u, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \beta^2 (\nabla u_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} - (u_t, v_t)_{L^2(Q_T)} \\ = \; & (F, v)_{L^2(Q_T)} - \alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) dsdt \\ & + \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega u(\xi, t) d\xi \right) dsdt + (v(x,0), \psi)_{L^2(\Omega)} \\ & - \beta^2 (v(x,0), \Delta\psi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Définition 3.1 *Une fonction $u \in V(Q_T)$ est appelé une solution généralisée du problème* (3.1.1)*, si elle satisfait l'équation* (3.1.4) *pour chaque $v \in W(Q_T)$ et $u(x,0) = \varphi(x)$.*

3.2 L'étude de l'existence de la solution faible du problème posé par l'application de la méthode de Galerkin

Nous donnons maintenant le résultat de l'existence d'une solution au problème (3.1.1), et le prouver à l'aide de la méthode de *Galerkin*.

Théorème 3.1 *Si $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\psi(x) \in W_2^1(\Omega)$, et $F(x,t) \in L^2(Q_T)$, alors il ya au moins une solution généralisée dans $V(Q_T)$ de problème* (3.1.1).

Preuve

Soient $\{Z_k(x)\}_{k\geq 1}$ un système orthonormé fondamental dans $W_2^1(\Omega)$, (i.e) $(Z_k, Z_l)_\Omega = \delta_{k,l}$. Nous cherchons une solution approchée $u^N(x)$ sous la forme

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k(t) Z_k(x), \tag{3.2.1}$$

Où $C_k(t)$ sont des fonctions définis par les conditions

$$(\mathcal{L}u, Z_l)_{L^2(\Omega)} = (F, Z_l)_{L^2(\Omega)}, \quad l = 1, ..., N.$$

Et peut être déterminée cette relation

$$\begin{aligned} & \left(u_{tt}^N, Z_l\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla Z_l\right)_{L^2(\Omega)} + \beta^2 \left(\nabla u_{tt}^N, \nabla Z_l\right)_{L^2(\Omega)} \\ & +\alpha^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) ds + \beta^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) ds \\ = \; & (F, Z_l)_{L^2(\Omega)}, \qquad l = 1, ..., N, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Avec

$$C_k(0) = \alpha_k, \qquad C_k'(0) = \beta_k, \tag{3.2.3}$$

Où les constantes α_k et β_k représentent les coefficients dans les sommes $\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k . Z_k(x)$ et $\psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k . Z_k(x)$ (respectivement), qui approximent les conditions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ dans $W_2^1(\Omega)$ lorsque $N \to \infty$.

Remplacement de (3.2.1) dans (3.2.2), donne :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} C_k(t) Z_k(x) \right)_{tt} . Z_l \; dx \; + \; \alpha^2 \int_\Omega \nabla \left(\sum_{k=1}^{N} C_k(t) Z_k(x) \right) . \nabla Z_l \; dx \\ & + \beta^2 \int_\Omega \nabla \left(\sum_{k=1}^{N} C_k(t) Z_k(x) \right)_{tt} . \nabla Z_l \; dx \\ & + \alpha^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} C_k(\tau) Z_k(\xi) \right) d\xi d\tau \right) ds \\ & + \beta^2 \int_{\partial\Omega} Z_l \left(\int_0^t \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} C_k(\tau) Z_k(\xi) \right)_{tt} d\xi d\tau \right) ds \\ = \; & (F, Z_l)_{L^2(\Omega)}, \qquad l = 1, ..., N, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} \left(C_k''(t) Z_k Z_l + \alpha^2 C_k(t) \nabla Z_k \nabla Z_l + \beta^2 C_k''(t) \nabla Z_k \nabla Z_l \right) dx \\
&+\alpha^2 \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau \\
&+\beta^2 \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k''(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau \\
= \;& (F, Z_l)_{L^2(\Omega)}. \qquad\qquad l = 1, ..., N, \qquad\qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(F, Z_l)_{L^2(\Omega)} \\
= \;& \sum_{k=1}^{N} \left(C_k''(t) \left((Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} + \beta^2 (\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)} \right) + \alpha^2 C_k(t) (\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)} \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{N} \alpha^2 \int_0^t \left(C_k(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau \\
&+ \sum_{k=1}^{N} \beta^2 \int_0^t \left(C_k''(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau, \qquad l = 1, ..., N, \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Si dans cette dernière égalité, nous faisons les notations suivante :

$$(Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

$$(\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)} = \gamma_{kl}, \qquad (3.2.8)$$

$$\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds = \chi_{kl}, \qquad (3.2.9)$$

$$(F, Z_l)_{L^2(\Omega)} = F_l(t), \qquad (3.2.10)$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N} C_k''(t)(\delta_{kl}+\beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2 C_k(t)\gamma_{kl} + \int_0^t \left(\alpha^2 C_k(\tau)\chi_{kl} + \beta^2 C_k''(\tau)\chi_{kl}\right) d\tau \\ = \; & F_l(t), \qquad\qquad l=1,...,N, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

La différenciation par rapport à t dans (3.2.11) conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N} C_k'''(t)(\delta_{kl}+\beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2 C_k'(t)\gamma_{kl} + \alpha^2 C_k(t)\chi_{kl} + \beta^2 C_k''(t)\chi_{kl} \\ = \; & F_l{}'(t), \qquad\qquad l=1,...,N, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

On prend $t=0$ dans (3.2.11) on obtient :

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} C_k''(0)(\delta_{kl}+\beta^2\gamma_{kl}) + \alpha^2\alpha_k\gamma_{kl} = F_l(0) \\ C_k'(0)=\beta_k \qquad , \qquad C_k(0)=\alpha_k. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Les équations (3.2.12) forment un système d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants de troisième ordre en t pour les inconnues $C_k(t)$, $k=1,...N$. Par un théorème bien connu sur la solvabilité de ces systèmes, le problème (3.2.12) admet une solution unique pour les conditions initiales (3.2.13). Ainsi, pour tout n il existe une fonction $u^N(x)$ satisfaisant (3.2.2).

Maintenant on va obtenir les bornes pour u^N qui ne dépend pas de N. Pour ce faire, on multiplie chaque équation de (3.2.2) par l'approprié $C_k'(t)$, ajoutons-les de 1 à N et ensuite intégrons par rapport à t de 0 à τ, avec $\tau \leq T$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega \left[u_{tt}^N.Z_l.C_k'(t) + \alpha^2\left(\nabla u^N.\nabla Z_l.C_k'(t)\right) + \beta^2\left(\nabla u_{tt}^N.\nabla Z_l.C_k'(t)\right)\right] dx\ dt \\
&+\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} Z_l.C_k'(t)\left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) ds\ dt \\
&+\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} Z_l.C_k'(t)\left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\tau)d\xi d\tau\right) ds\ dt \\
= &\int_0^\tau \int_\Omega F.Z_l.C_k'(t)\ dt, \qquad\qquad l=1,...,N, \qquad\qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(u_{tt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} + \alpha^2\left(\nabla u^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} + \beta^2\left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
&+\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N\left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right) ds dt \\
&+\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N\left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right) ds dt \\
= &\left(F, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)}. \qquad\qquad l=1,...,N, \qquad\qquad (3.2.15)
\end{aligned}$$

L'évaluation de chaque terme de la partie gauche de (3.2.15), donne

$$\begin{aligned}
\left(u_{tt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q^\tau)} &= \int_\Omega \left[\int_0^\tau u_{tt}^N\ .\ u_t^N\ dt\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\ (u_t^N(x,\tau))^2 - \ (u_t^N(x,0))^2\ \right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \left(\nabla u^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^{\tau})} &= \alpha^2 \int_\Omega \left[\int_0^\tau \nabla u^N \ . \ \nabla u_t^N \ dt\right] dx \\
&= \frac{\alpha^2}{2}\left[\int_\Omega \left[\ (\nabla u^N(x,\tau))^2 - \ (\nabla u^N(x,0))^2 \ \right] dx\right] \\
&= \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^2 \left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q^{\tau})} &= \beta^2 \int_\Omega \left[\int_0^\tau \nabla u_{tt}^N \ . \ \nabla u_t^N \ dt\right] dx \\
&= \frac{\beta^2}{2}\left[\int_\Omega \left[\ (\nabla u_t^N(x,\tau))^2 - \ (\nabla u_t^N(x,0))^2 \ \right] dx\right] \\
&= \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) ds dt \\
= \ &\alpha^2 \int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau) \int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
&-\alpha^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) d\xi dt ds, \qquad (3.2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) ds dt \\
= \ &\beta^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t) d\xi dt ds \\
&-\beta^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi dt ds. \qquad (3.2.20)
\end{aligned}$$

Remplacement les égalités (3.2.16) - (3.2.20) dans (3.2.15), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
=\;&\frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&-\alpha^2\int_{\partial\Omega}u^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi dtds\\
&+\alpha^2\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi dtds\\
&-\beta^2\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,t)d\xi dtds\\
&+\beta^2\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi dtds\\
&+\left(F,u_t^N\right)_{L^2(Q^{\tau})},
\end{aligned}
\tag{3.2.21}
$$

On utilisons l'inégalité de $\varepsilon-Cauchy$ et l'inégalité de Trace, pour estimer les cinq derniers termes de de la partie droite de (3.2.21) comme suit :

$$
\begin{aligned}
&-\alpha^2\int_{\partial\Omega}u^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi dtds\\
\leq\;&\frac{\alpha^2\varepsilon_1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(u^N(x,\tau)\right)^2ds+\frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1}\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi dt\right)^2ds\\
\leq\;&\frac{\alpha^2\varepsilon_1}{2}\left(\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&+\frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1}\tau\left|\Omega\right|^2l(\varepsilon)\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2,
\end{aligned}
\tag{3.2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi dtds\\
\leq\;&\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(u^N(x,t)\right)^2dsdt+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega u^N(\xi,t)d\xi\right)^2dsdt\\
\leq\;&\frac{\alpha^2}{2}\left(\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2+l(\varepsilon)\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2\right)\\
&+\frac{\alpha^2}{2}l(\varepsilon)\left|\Omega\right|\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2,
\end{aligned}
\tag{3.2.23}
$$

$$\begin{aligned} & -\beta^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,t)d\xi dtds \\ \leq\ & \frac{\beta^2}{2}\left(\varepsilon \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})} + l(\varepsilon)\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})}\right) \\ & +\frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon)\left|\Omega\right|\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})}, \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

$$\begin{aligned} & \beta^2 \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi dtds \\ \leq\ & \frac{\beta^2}{2}\left(\varepsilon \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})} + l(\varepsilon)\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})}\right) \\ & +\frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon)\left|\Omega\right|\tau\left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})}, \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

$$\left(F, u_t^N\right)_{L^2(Q^{\ \tau})} \leq \frac{1}{2}\left\|F\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})} + \frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.26}$$

Combiner les inégalités (3.2.22) - (3.2.26) et l'égalité (3.2.21), et faire usage de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \ \leq\ & \left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})} + \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^{\ \tau})} \\ & + \left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
&(1-\frac{\alpha^2\varepsilon_1}{2}l(\varepsilon))\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon\varepsilon_1)\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &(\frac{1}{2}+\frac{\beta^2}{2}l(\varepsilon)\left|\Omega\right|T)\left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|F\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+(1+\frac{\alpha^2}{2\varepsilon_1}T\left|\Omega\right|^2l(\varepsilon)+\frac{\alpha^2}{2}l(\varepsilon)+\frac{\alpha^2}{2}l(\varepsilon)\left|\Omega\right|)\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+(\frac{3}{2}+\beta^2l(\varepsilon)+\beta^2l(\varepsilon)\left|\Omega\right|)\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+\frac{\alpha^2}{2}\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\beta^2\varepsilon\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (3.2.28)
\end{aligned}
$$

En prenant $\varepsilon_1=1/\alpha^2l(\varepsilon)$, et en choisissant ε sorte que $\alpha^2l(\varepsilon)>\varepsilon$, nous pouvons mettre que (3.2.28) sous la forme simple :

$$
\begin{aligned}
&\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_t^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\|\nabla u_t^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &D\Big(\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+\left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|F\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}\Big), \qquad (3.2.29)
\end{aligned}
$$

Où

$$
D=\frac{\max\left\{\frac{1}{2}+\frac{\beta^2l(\varepsilon)|\Omega|T}{2},\frac{\beta^2}{2},\frac{\alpha^2}{2},1+\frac{\alpha^4l^2(\varepsilon)|\Omega|^2T}{2}+\frac{\alpha^2l(\varepsilon)}{2}+\frac{\alpha^2l(\varepsilon)|\Omega|}{2},\ \frac{3}{2}+\beta^2l(\varepsilon)\left|\Omega\right|+\beta^2l(\varepsilon),\beta^2\varepsilon,\frac{\alpha^2}{2}\varepsilon\right\}}{\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\beta^2}{2},\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\varepsilon}{2l(\varepsilon)}\right\}}. \qquad (3.2.30)
$$

Pour l'inégalité (3.2.29), nous appliquons le lemme de *Gronwall* , puis on intégre de 0 à τ pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left\|u^N\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|\nabla u^N\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|u^N_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|\nabla u^N_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ \leq \quad & D.\exp\Big\{DT[\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q^\tau)}]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

On néglige le dernier terme de la partie gauche de l'inégalité (3.2.31), alors

$$\left\|u^N\right\|^2_{W^1_2(Q^\tau)} \leq D\exp\left\{DT\left(\|\varphi\|^2_{W^1_2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{W^1_2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right)\right\}, \tag{3.2.32}$$

à partir de (3.2.32) ,on conclut que :

$$\left\|u^N\right\|^2_{W^1_2(Q^\tau)} \leq A.$$

Donc, la suite $\left\{u^N\right\}_{N\geq 1}$ est bornée dans $V(Q_T)$, et nous pouvons en extraire une sous suite pour laquelle nous utilisons la même notation qui converge faiblement dans $V(Q_T)$ à une fonction limite $u(x,t)$. Nous devons montrer que $u\ (x,t)$ est une solution généralisée de (3.1.1), puisque $u^N(x,t) \to u(x,t)$ dans $L^2(Q_T)$ et $u^N(x,0) \to \varphi(x)$ dans $L^2(\Omega)$, alors $u(x,0) = \varphi(x)$.

Maintenant, prouver que (3.2.2) est valable ,nous multiplions chacun des relations (3.2.2) par une fonction $p_l(t) \in W^1_2(0,T)$, $p_l(T) = 0$, puis ajouter les égalités obtenues de $l = 1$ à $l = N$, et on intégre par rapport a t sur $(0,T)$.

Posons $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t)Z_k(x)$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&-\left(u_t^N,\eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)}+\alpha^2\left(\nabla u^N,\nabla\eta^N\right)_{L^2(Q_T)}\\
&-\beta^2\left(\nabla u_t^N,\nabla\eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)}\\
=\;&\left(u_t^N(x,0),\eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)}+\beta^2\left(\nabla u_t^N(x,0),\nabla\eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)}\\
&-\alpha^2\int_{\partial\Omega}\int_0^T\eta^N(x,t)\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\tau)d\xi d\tau dtds\\
&-\beta^2\int_{\partial\Omega}\int_0^T\eta^N(x,t)\int_0^t\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\tau)d\xi d\tau dtds\\
&+\left(F,\eta^N\right)_{L^2(Q_T)}.
\end{aligned}
\tag{3.2.33}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&-\left(u_t^N,\eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)}+\alpha^2\left(\nabla u^N,\nabla\eta^N\right)_{L^2(Q_T)}\\
&-\beta^2\left(\nabla u_t^N,\nabla\eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)}\\
=\;&\left(F,\eta^N\right)_{L^2(Q_T)}+\left(u_t^N(x,0),\eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)}\\
&+\beta^2\left(\nabla u_t^N(x,0),\nabla\eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)}\\
&-\alpha^2\int_{\partial\Omega}\int_0^T\eta^N(x,t)\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\tau)d\xi d\tau dtds\\
&-\beta^2\int_{\partial\Omega}\int_0^T\eta^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,t)d\xi dtds\\
&+\beta^2\int_{\partial\Omega}\int_0^T\eta^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi dtds,
\end{aligned}
\tag{3.2.34}
$$

Pour tous η^N de la forme $\sum_{k=1}^{N} p_l(t)Z_k(x)$.

On a :

$$
\int_0^t\int_\Omega(u^N(\xi,\tau)-u(\xi,\tau))d\xi d\tau\le\sqrt{T\left|\Omega\right|}\left\|u^N-u\right\|_{L^2(Q_T)},
\tag{3.2.35}
$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \eta^N(x,t)\int_\Omega (u_t^N(\xi,t)-u_t(\xi,t))d\xi dt \\
\leq\ & \sqrt{|\Omega|}\left(\int_0^T \eta^N(x,t)\right)^{1/2}\left\|u_t^N-u_t\right\|_{L^2(Q_T)}, \qquad (3.2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \eta^N(x,t)\int_\Omega (u_t^N(\xi,0)-u_t(\xi,0))d\xi dt \\
\leq\ & \sqrt{|\Omega|}\left(\int_0^T (\eta^N(x,t))^2 dt\right)^{1/2}\left\|u_t^N(x,0)-u_t(x,0)\right\|_{L^2(Q_T)}, \qquad (3.2.37)
\end{aligned}$$

Et

$$\left\|u^N-u\right\|_{L^2(Q_T)}\to 0, \qquad N\to\infty, \qquad (3.2.38)$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\tau)d\xi d\tau dt ds \\
\to\ & \int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta(x,t)\int_0^t\int_\Omega u(\xi,\tau)d\xi d\tau dt ds, \qquad (3.2.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,t)d\xi dt ds \\
\to\ & \int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta(x,t)\int_\Omega u_t(\xi,t)d\xi dt ds, \qquad (3.2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\int_0^t\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi d\tau dt ds \\
\to\ & \int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta(x,t)\int_0^t\int_\Omega u_t(\xi,0)d\xi d\tau dt ds. \qquad (3.2.41)
\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions de limite de u satisfait (3.2.2) pour chaque $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t)Z_k(x)$. On note $\mathbb{Q}_N$ l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t)Z_k(x)$, avec $p_l(t) \in W_2^1(0,T)$, $p_l(T) = 0$.

Mais $\cup_{l=1}^{N}\mathbb{Q}_N$ est dense dans $W(Q_T)$, alors la relation (3.2.2) est valable pour tout $u \in W(Q_T)$. Ainsi, nous avons montré que la fonction de limite $u(x,t)$ est une solution généralisée du problème (3.1.1) dans $V(Q_T)$.

3.3 L'unicité de la solution

Théorème 3.1 *Le problème* (3.1.1) *ne peut pas avoir plus d'une solution généralisée en* $V(Q_T)$.

Preuve. Supposons que $u_1 \in V(Q_T)$ et $u_2 \in V(Q_T)$ sont deux solutions de problème (3.1.1) de telle sorte que u_1 est différente de u_2. Alors $U = u_1 - u_2$ résout

$$\begin{cases} U_{tt} - \alpha^2\Delta U - \beta^2\Delta U_{tt} = 0, \\ U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0, \\ \partial U/\partial\eta = \int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Et (3.1.4) donne

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \left(\nabla U, \nabla v\right)_{L^2(Q_T)} - \beta^2 \left(\nabla U_t, \nabla v_t\right)_{L^2(Q_T)} - \left(U_t, v_t\right)_{L^2(Q_T)} \\ = \; & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)d\xi d\tau \right) dsdt \\ & +\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t)d\xi \right) dsdt. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Définir la fonction $v(x,t)$ par :

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau U(x,s)ds, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Il est évident que $v \in W(Q_T)$ et $v_t(x,t) = -U(x,t)$ pour tous $t \in [0,\tau]$.

La simplification de (3.3.2) donne :

$$\alpha^2 \left(\nabla U, \nabla v\right)_{L^2(Q_T)} = \frac{\alpha^2}{2} \left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.4}$$

$$-\beta^2 \left(\nabla U_t, \nabla v_t\right)_{L^2(Q_T)} = \frac{\beta^2}{2} \left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.5}$$

$$-\left(U_t, v_t\right)_{L^2(Q_T)} = \frac{1}{2} \left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.6}$$

Remplacement de (3.3.4) - (3.3.6) en (3.3.2), conduit à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{2} \left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2} \left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = \; & \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi\right) ds dt \\ & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau\right) ds dt, \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

La partie droite de (3.3.7) peut être délimitée comme suit :

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau\right) ds dt \\ \leq \; & \alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{v^2(x,t)}{2} + \frac{T\left|\Omega\right|}{2} \int_0^t \int_\Omega U^2(\xi,\tau) d\xi d\tau\right) ds dt \\ \leq \; & \frac{\alpha^2 T^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2} \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,t) d\xi dt \\ & +\alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{v^2(x,t)}{2} ds dt, \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

En utilisant l'inégalité de Trace, alors l'inégalité (3.3.8) devient :

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) ds dt \\ \leq \; & \frac{\alpha^2}{2} \left(\varepsilon \left\| \nabla v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \left\| v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) + \frac{\alpha^2 T^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2} \left\| U \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Maintenant, comme :

$$v^2(x,t) = \left(\int_t^\tau U(x,s) ds \right)^2 \leq \tau \int_0^\tau U^2(x,s) ds,$$

Et

$$\left\| v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq \tau^2 \left\| U \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \leq T^2 \left\| U \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \tag{3.3.10}$$

Alors (3.3.9) devient :

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) ds dt \\ \leq \; & \left(\frac{\alpha^2}{2} l(\varepsilon) T^2 + \frac{\alpha^2 T^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2} \right) \left\| U \right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \left\| \nabla v \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$$\begin{aligned} & \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi \right) ds dt \\ = \; & -\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega U_t(\xi,t) d\xi ds dt \\ = \; & -\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega U_t(\xi,t) d\xi ds dt \\ \leq \; & \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \frac{v^2(x,t)}{2} ds dt \\ & + \frac{\beta^2 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right|}{2} \int_0^\tau \int_\Omega U_t^2(\xi,t) d\xi dt. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

En utilisant l'inégalité de trace et l'inégalité (3.3.10), l'estimation (3.3.12) prend la forme :

$$\begin{aligned} & \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t) d\xi \right) dsdt \\ \leq & \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\beta^2}{2} \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\beta^2}{2} l(\varepsilon) T^2 \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Combinaison de (3.3.8), (3.3.11) et (3.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{2} \|\nabla v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2} \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq & \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2} \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2} l(\varepsilon) T^2 + \frac{\alpha^2 T^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \right) \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} . \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Maintenant, multipliez l'équation différentielle dans la problème (3.3.1) par U_t et intégrons sur $Q^{\,\tau} = \Omega \times (0,\tau)$, nous obtenons :

$$(U_{tt}, U_t)_{L^2(Q^\tau)} - \alpha^2 (\Delta U, U_t)_{L^2(Q^\tau)} - \beta^2 (\Delta U_{tt}, U_t)_{L^2(Q^\tau)} = 0. \tag{3.3.15}$$

Après l'utilisation de l'intégration par parties, et les conditions aux limites dans (3.3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2}{2} \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2} \|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) dsdt \\ & + \frac{\beta^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \int_\Omega U(\xi,t) d\xi dsdt, \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

La partie droite de (3.3.16) peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds dt \\ \leq & \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t^2(x,t) ds dt \\ & + \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Après l'utilisation de l'inégalité de trace, (3.3.17) devient :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds dt \\ \leq & \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta \\ & + \frac{\alpha^2}{2} \left(\varepsilon \|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + l(\varepsilon) \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \right) \\ = & \frac{\alpha^2}{2} T^2 |\Omega| |\partial\Omega| \|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\alpha^2}{2} l(\varepsilon) \|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t \int_\Omega U(\xi,t) d\xi ds dt \\ \leq & \frac{\beta^2}{4} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t^2(x,t) ds dt + \frac{\beta^2}{4} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |\Omega| \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta \\ = & \frac{\beta^2}{4} |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \int_\Omega U^2(\xi,\eta) d\xi d\eta \\ & + \frac{\beta^2}{4} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_t^2(x,t) ds dt \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Nous appliquons l'inégalité de trace, (3.3.18) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} U_t\int_\Omega U(\xi,t)d\xi ds dt \\ \leq\ & \frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{\beta^2}{4}\varepsilon\left\|\nabla U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\beta^2}{4}l(\varepsilon)\left\|U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

La combinaison des inégalités (3.3.18), (3.3.20), et l'égalité (3.3.16) donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\|U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \left(\frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \frac{\alpha^2}{2}T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|\nabla U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

En ajoutant côté à l'autre de (3.3.14) et (3.3.21), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\left\|\nabla U_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \left(\frac{\beta^2}{4}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \alpha^2T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}l(\varepsilon)T^2\right)\left\|U\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{\beta^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|}{2}\right)\left\|U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left\|\nabla U_t\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\left\|\nabla v\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Maintenant, pour le dernier terme de la partie droite de (3.3.22), nous définissons la fonction $\theta(x,t)$ par la relation

$$\theta(x,t) = \int_0^t U(x,s)ds.$$

Par conséquent, en utilisant (3.3.3), en résulte

$$v(x,t) = \theta(x,\tau) - \theta(x,t),\ \nabla v(x,0) = \nabla\theta(x,\tau),$$

Et

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2_{L^2(Q^\tau)} &= \|\nabla\theta(x,\tau) - \nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ &\leq 2\tau \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)} \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (3.3.22) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2}\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq & \left(\frac{\beta^2}{4}|\Omega|\,|\partial\Omega| + \alpha^2T^2|\Omega|\,|\partial\Omega| + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}l(\varepsilon)T^2\right)\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right) + \frac{\beta^2|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\right)\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\right)\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ & + \frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon 2\tau\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Nous supposons que $(\alpha^2/2) - (\beta^2+\alpha^2)\varepsilon 2\tau > 0$, alors après l'addition de $\|\nabla U\|^2_{L^2(Q^\tau)}$ à la partie droite de (3.3.23), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha^2}{2}-\varepsilon\tau(\beta^2+\alpha^2)\right)\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &\left(\frac{\beta^2}{4}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\alpha^2T^2|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}l(\varepsilon)T^2\right)\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+\frac{\varepsilon}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left(\frac{l(\varepsilon)}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\frac{\beta^2|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\right)\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&\left(\frac{(\beta^2+\alpha^2)}{2}\varepsilon\right)\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|\nabla U\|^2_{L^2(Q^\tau)}. \qquad (3.3.24)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &D\{\,\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)}\\
&+\|\nabla U\|^2_{L^2(Q^\tau)}\}. \qquad (3.3.25)
\end{aligned}$$

Où

$$D=\frac{\max\left\{\frac{\beta^2|\Omega||\partial\Omega|+4\alpha^2T^2|\Omega||\partial\Omega|}{4}+\frac{(\beta^2+\alpha^2)l(\varepsilon)T^2}{2},\ \frac{(\beta^2+\alpha^2)\varepsilon}{2},\ \frac{l(\varepsilon)\left(\alpha^2+\beta^2\right)+2\beta^2|\Omega||\partial\Omega|}{4},\ 1\right\}}{\min\left\{\frac{\alpha^2-2\varepsilon\tau(\beta^2+\alpha^2)}{2},\ \frac{\beta^2}{2},\ \frac{1}{2}\right\}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &D\exp[DT\left(\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|\nabla U\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right.\\
&\left.+\|\nabla U_t\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\|U\|^2_{L^2(Q^\tau)}\right)], \qquad (3.3.26)
\end{aligned}$$

Si nous appliquons le lemme de *Gronwall* à (3.3.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\nabla U_t(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \; & 0, \qquad\qquad \forall\tau \in [0, \alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2)]. \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Même manière pour des intervalles $\tau \in [\ (m-1)\alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2)\ \ ,\ \ m\alpha^2/2\varepsilon(\beta^2+\alpha^2)\ ]$, pour couvrir tout l'intervalle $[0,T]$, et prouvant ainsi que $u(x,\tau)=0$, pour tout τ dans $[0,T]$.

.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode classique de *Galerkin* pour traiter un problème mixte avec une condition non locale (la dérivée normale est exprimé par une valeur moyenne de la solution) pour une équation de *Boussinesq* de dimensions supérieurs.

Notre résultat généralise la plus part des résultats obtenus quand la méthode utilisée est celle de *Galerkin*.

Notre objectif ultime après ce travail est de traiter d'autres problèmes mixtes non locaux, non linéaires plus compliqués avec des conditions non locales.

Bibliographie

[1] Alexander P. Équations aux dérivées partielles, Solution classique, Différences finies. 3.

[2] Aude R.P. Adeline R. Introduction aux équations aux dérivées partielles, Étude théorique. 2012/2013 ; 11-20.

[3] Chertock A, Christor C.I, Kurganov A. Central upwind schemes for Boussinesq paradigm equation.

[4] Claude L.N. Sir George G.S. Systèmes différentiels.

[5] David R. The anelastic and Boussinesq approximation. 6 May 2013.

[6] Dumas. Romain T. Introduction aux EDP d'évolution.

[7] Dutykh D, Dias F. Dissipative Boussinesq equation.

[8] George K. Équations aux dérivées partielles. 2001 ; 6.

[9] Guezane Lakoud A. Boumaza N. Galerkin method for the Boussinesq equation with integral condition. April 2012.

[10] Helffer B. Introduction aux équations aux dérivées partielles, Analyse de Fourier et introduction aux distributions. Version pour la Roumanie. Février 2014 ; 9-13.

[11] Hervé le Dret. Équations aux dérivées partielles élliptiques. 04 Mars 2010 ; 75-78.

[12] https :www.fourier.ujf-grenoble.fr (espace de Sobolev).

[13] https :www.Les.mathématiques.net.

[14] https :www.math.univ.lille.fr. (Cours 303 : Topologie et calcul différentiel).

[15] Ivan N. Une démonstration de l'inégalité de Poincaré. 22 Février 2001.

[16] Kamache F. Mémoire : Etude de quelques classes d'équations aux dérivées partielles. 2011/2012.

[17] Koop O.R. Continuous and discontinuous Galerkin finite element methods of variational Boussinesq water-wave models. 4 October 2006.

[18] Ladyzhenskaya O.A. The boundary value problems of Mathematical physics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[19] Laurent P.M. Introduction aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles ; 9-10.

[20] Leray J. Lectures on hyperbolic differential equations with variable coefficients, Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[21] Lopes F.C, Tapia E, Ongay F, Aguero M. The K=1 finite element numerical solution for the improved Boussinesq equation. International journal of modern non linear theory. 2015 ; 4,88-99.

[22] L.Pujo M. Équations différentielles ordinaires et partielles. 31-34.

[23] Maximilian F.H. Cours de mathématique 2. Version du 21 Avril 2002 ; 5-6.

[24] Mesloub S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. J. Math. Anal. Appl. 2006 ; **316** : 189-209.

[25] Mesloub S. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions. Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. 2008 ; **68** : 2594-2607.

[26] Mesloub S. Mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation. Math. Meth. Appl. Sci. 2010, 33 57–70, DOI : 10.1002/mma.1150.

[27] Mesloub S. On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 203-219.

[28] Mesloub S and Bouziani A. On a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol **22** N°**3** (1999), 511-519.

[29] Mesloub S. Bouziani A. Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equationwith Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch. Anal. 15(3), 291–300 (2002).

[30] Mesloub S. Bouziani A. Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classed'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. 6, 59–69 (1998).

[31] Mesloub S. Mesloub F. On the higher dimension Boussinesq equation with nonclassical condition. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 34 (2011), no. 5, 578–586.

[32] Mesloub F. Thèse : Etude de quelques classes d'équations et systèmes d'équations aux dérivées partielles.

[33] Mihai G. Espace vectoriels normés. 2007/2008.

[34] Nicolas R. Équations différentielles. 20 Février 2001 ; 3.

[35] Walkleg M.A. A numerical method for extended Boussinesq shallow-water wave equation. September 1999.

[36] Zeriahi A. Les espaces de Lebesgue L^P .Version Décembre 2011.